Tunghai Science Vol. 9: 9−14
July, 2007

Gerretsen 不等式之簡易證明

蘇偉欣* 莊憲政* 王道明† 胡豐榮*

Abstract

設 ΔABC 中, a , b 與 c 爲其三邊長, s 爲半周長。本研究使用初等代換運算以及算術平均數大於等於幾何平均數之方法, 推導得出下列 Gerretsen 不等式:

$$16Rr-5r^2 \leq s^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2.$$

關鍵字: Gerretsen 不等式, 半周長。

1 前言

歷年來, 奧林匹克數學競試的試題中, 履履出現不等式的證明題, 而這些題目中, 有些是關於三角形的不等式 ([3], [4], [5], [6]), 又最近([1], [2]) 以三角形的外接圓半徑 R, 三角形內切圓半徑 r, 以及三角形周長之半 s 等這些量, 來探討相關的幾何性質, 得到許多漂亮的結果。

在精讀([1], [2]) 的文章後, 發現其引用了一個非常重要的不等式, 即下式之 Gerretsen 不等式:

$$16Rr-5r^2 \leq s^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2,$$

該不等式在丁氏文章中扮演的角色, 如同歌西不等式的重要。然而, 丁氏的文章中, 並未給予 Gerretsen 不等式證明, 在這樣的動機下, 我們於 Yahoo 底下檢索了關於 Gerretsen 不等式的訊息, 結果出人意料的是沒有發現此不等式的證明法, 爰此, 我們嘗試使用最初等的手法, 挑戰 Gerretsen 不等式的證明。

2 輔助性質

爲了方便證明 Gerretsen 不等式, 我們整理出下面重要的性質, 來輔助證明。

性質2.1. 令三角形的三邊長與面積分別爲 a, b, c, Δ, 則

*台中教育大學數學教育系
†東海大學數學系

1. (1) $abc = 4Rrs$,
2. (2) $ab+bc+ca = s^2+4Rr+r^2$,
3. (3) $a^2+b^2+c^2 = 2(s^2-4Rr-r^2)$,

證明: 由海龍公式 $\Delta = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, 可得知

$$(s-a)(s-b)(s-c) = r^2 s.$$

因爲 $abc = 4Rrs$, 所以 $abc+(s-a)(s-b)(s-c) = 4Rrs+r^2s$。又因爲

$$\begin{aligned} abc+(s-a)(s-b)(s-c) &= abc+[s^3-(a+b+c)s^2+(ab+bc+ca)s-abc] \\ &= s^3-2s^3+(ab+bc+ca)s = (ab+bc+ca)s-s^3, \end{aligned}$$

所以 $abc+(s-a)(s-b)(s-c) = 4Rr+rs$, 故 $ab+bc+ca = s^2+4Rr+r^2$, 因此得證 (2)。再由 (2) 可得知

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) = 4s^2-2s^2-8Rr-2r^2,$$

所以 $a^2+b^2+c^2 = 2(s^2-4Rr-r^2)$, 故得證 (3)。

3 Gerretsen 不等式之下界證明

在本節旨在證明 $16Rr-5r^2 \le s^2$, 證明內容如下: 令 $X = s-a, Y = s-b, Z = s-c$, 不失一般性, 假設 $X \ge Y \ge Z$。所以

$$X(X-Y)^2+Z(Y-Z)^2+(X-Y)(Y-Z)(X-Y+Z) \ge 0.$$

另一方面, 因爲

$$\begin{aligned} s(s^2-16Rr+5r^2) &= s\left[(2s^2-8Rr-2r^2)-(s^2+4Rr+r^2)+8r^2-4Rr\right] \\ &= s\left[(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)+8r^2-4Rr\right] \\ &= s(a^2+b^2+c^2)-s(ab+bc+ca) \\ &\quad +(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)-abc \\ &= sb^2-2abs+sa^2-ab^2+2a^2b-a^3+sc^2-2bcs \\ &\quad +sb^2-b^2c+2bc^2-c^3+abs+2ab^2-a^2b+bcs \\ &\quad -sb^2+2b^2c-bc^2+2ac^2-3abc-b^3-acs \\ &= (s-a)(b-a)^2+(s-c)(c-b)^2 \\ &\quad +(bcs-sb^2-acs+abs)-(abc-ab^2-a^2c+a^2b) \\ &\quad +(b^2c-b^3-abc+ab^2)-(bc^2-b^2c-ac^2+abc), \end{aligned}$$

且

$$
\begin{aligned}
s(s^2-16Rr+5r^2) &= (s-a)(b-a)^2+(s-c)(c-b)^2 \\
&\quad +(s-a+b-c)(bc-b^2-ac+ab) \\
&= (s-a)(b-a)^2+(s-c)(c-b)^2 \\
&\quad +(b-a)(c-b)(s-a+b-c),
\end{aligned}
$$

所以

$$
s(s^2-16Rr+5r^2)=X(X-Y)^2+Z(Y-Z)^2+(X-Y)(Y-Z)(X-Y+Z)\geq 0,
$$

即 $s^2-16Rr+5r^2\geq 0$ 得證。

4 Gerretsen 不等式之上界證明

本節旨在證明 $s^2\leq 4R^2+4Rr+3r^2$, 證明內容如下:
由於

$$
\begin{aligned}
4r^2s^2(4R^2+4Rr+3r^2-s^2) &= a^2b^2c^2+4abc(s-a)(s-b)(s-c) \\
&\quad +12(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2 \\
&\quad -4s^3(s-a)(s-b)(s-c) \\
&= (X+Y)^2(Y+Z)^2(X+Z)^2 \\
&\quad +4(X+Y)(Y+Z)(X+Z)XYZ+12X^2Y^2Z^2 \\
&\quad -4(X+Y+Z)^3XYZ,
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
4r^2s^2(4R^2+4Rr+3r^2-s^2) &= (U+2V)^2+4V(U+2V)+12V^2 \\
&\quad -4V(X^3+Y^3+Z^3+3U+6V) \\
&= U^2-4V(X^3+Y^3+Z^3)-4UV \\
&= X^4(Y+Z)^2+Y^4(X+Z)^2+Z^4(X+Y)^2 \\
&\quad +2X^2Y^2(Y+Z)(X+Z)+2Y^2Z^2(X+Z)(X+Y) \\
&\quad +2X^2Z^2(Y+Z)(X+Y)-4XYZ(X^3+Y^3+Z^3) \\
&\quad -4XYZ(X^2Y+XY^2+X^2Z+XZ^2+Y^2Z+YZ^2),
\end{aligned}
$$

其中, 令 $U=X^2Y+XY^2+X^2Z+XZ^2+Y^2Z+YZ^2$, $V=XYZ$。根據算術平均數大於等於幾何平均數, 我們有

$$\begin{aligned}
& X^4(Y+Z)^2+Y^4(X+Z)^2+Z^4(X+Y)^2+2X^2Y^2(Y+Z)(X+Z) \\
& +2Y^2Z^2(X+Z)(X+Y)+2X^2Z^2(Y+Z)(X+Y)-4XYZ(X^3+Y^3+Z^3) \\
& -4XYZ(X^2Y+XY^2+X^2Z+XZ^2+Y^2Z+YZ^2) \\
\geq\ & 4X^4YZ+4XY^4Z+4XYZ^4+2X^2Y^2(Y+Z)(X+Z) \\
& +2Y^2Z^2(X+Z)(X+Y)+2X^2Z^2(Y+Z)(X+Y)-4XYZ(X^3+Y^3+Z^3) \\
& -4XYZ(X^2Y+XY^2+X^2Z+XZ^2+Y^2Z+YZ^2),
\end{aligned}$$

這使得

$$\begin{aligned}
4r^2s^2(4R^2+4Rr+3r^2-s^2) &= 2[(X^2Y^2Z^2-X^2Y^3Z-X^3Y^2Z+X^3Y^3) \\
&\quad +(X^2Y^2Z^2-XY^3Z^2-XY^2Z^3+Y^3Z^3) \\
&\quad +(X^2Y^2Z^2-X^2YZ^3-X^3YZ^2+X^3Z^3)] \\
&= 2[X^2Y^2(Y-Z)(X-Z)+Y^2Z^2(X-Z)(X-Y) \\
&\quad -X^2Z^2(Y-Z)(X-Y)] \geq 0.
\end{aligned}$$

因此得證

$$s^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2.$$

5 結語

回顧我們對 Gerretsen 不等式上下界的證明, 我們僅僅使用算術平均數大於等於幾何平均數的性質, 其餘都只是例行的初等代換運算。因此, 我們的證明淺顯易懂。

「Gerretsen 不等式」對大多數人而言, 也許是陌生的名詞, 但此不等式的內容相信會讓許多看過的人感到驚訝, 更加耐人尋味的是, Gerretsen 不等式, 透過 ([1], [2]) 的文章介紹後, 其在幾何學中亮眼的地位, 應是無可置否。

對 Gerretsen 不等式仍然意猶未盡的讀者, 可以利用一些特殊三角形, 例如正三角形、直角三角形等, 用來對不等式加以驗證。

References

[1] 丁遵標 (2005), “與三角形高有關的幾何性質”, 數學傳播, 二十九卷二期,55-60。

[2] 丁遵標 (2005), “關於三角形內角平分線長的幾何性質”, 數學傳播, 二十九卷三期, 61-64。

[3] 國際數學奧林匹亞 (2004), 第四十五屆, 第四題。

[4] 國際數學奧林匹亞 (1996), 第三十七屆, 第五題。

[5] 國際數學奧林匹亞 (1983), 第二十四屆, 第六題。

[6] 國際數學奧林匹亞 (1974), 第十七屆, 第二題。

[7] Gerretsen, J. C. H. (1953), “Inequalities in the triangle”, *Nieuw Tijdschr. Wiskunde*, **41**, 1-7.

A Simple Proof of Gerretsen's Inequality

Wei-Sin Su* Hsien-Cheng Chuang* Tao-Ming Wang† Feng-Rung Hu*

Abstract

Let a , b , c and s be the sides and the semiperimeter of a triangle ΔABC, respectively. Our primary objective is to show the following Gerretsen's inequality by using an elementary method:

$$16Rr-5r^2 \leq s^2 \leq 4R^2+4Rr+3r^2.$$

Keywords: Gerretsen's inequality, semiperimeter

*Department of Mathematical Education, Taichung University, Taichung 403, Taiwan
†Department of Mathematics, Tunghai University, Taichung 407, Taiwan