

Lambert W-函數解線性時滯微分方程

陳淑珍* 黃皇男* 楊秉諺*

摘要

考慮線性時滯微分系統，若由狀態轉移函數擬合時間響應，因是由一段段時間積分而成，因此時間響應會成為分段可微的連續函數，但若能以 Lambert W-函數擬合系統響應，則此響應乃由可數無限多個作用在系統特徵值上的指數函數合成，因此必成為可微函數。本文針對多項延遲的時滯方程，從拉氏變換著手，得到核函數的拉氏變換，並運用 Laurent 級數計算由 W-函數組成的核函數，以得到系統響應，這個響應為可微函數，將可供系統進一步進行穩定性分析與控制設計使用。

關鍵字：時滯系統、Lambert W-函數、狀態轉移函數、拉氏變換

一、簡介

時滯系統存在於各大領域中，如動態系統、大自然的生態發展、物理或化學領域皆存在需要以時滯系統解決的問題，考慮線性時滯系統，Melek-Zavarei 和 Jamshidi 以迭代的方式得到系統狀態轉移函數，再以此狀態轉移函數得到系統解析解 [10]。Corless 以 Lambert W-函數得到單一時滯方程齊次項通解，因由 W-函數得到的系統特徵值不重根，因此解析解的形式為指數函數的線性組合 [2, 3]。Asl 和 Ulsoy 再將此法推廣至非齊次單一時滯方程，並以此法計算單一時滯系統的簡單例子，他們在附錄中提供系統常數項係數的計算方法 [1]，Yi 將此方法完整系統化，可作用於任意單一時滯系統，計算常數項係數方面，除了使用 Asl 和 Ulsoy 以矩陣的方式取得係數的近似值，也能使用拉氏變換得到常數項係數 [7, 8, 9]。

本文針對方程著手，以拉氏變換得到多項延遲時滯微分方程的核函數，並以 W-函數進行擬合，得到核函數的解析形式，因此得到系統的時間響應，其中對應起始條件的係數利用拉氏變換與極限的觀念計算而得。

*東海大學應用數學系

二、數學基礎知識

在開始討論時滯方程前，需要本節的前導知識。

2.1 拉氏變換

給定函數 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ ，定義其拉氏變換為

$$\mathcal{L}[f(t); s] = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f(t)e^{-st} dt$$

因其為不定積分，當 $\mathcal{L}[f(t); s]$ 的實部趨近於某個實數時，也就是 $|\mathcal{L}[f(t); s]|$ 小於某個實數，定義 f 為可拉氏變換函數，即該函數 f 可進行拉氏變換，下面的定理決定某個集合的函數皆可進行拉氏變換：

定理 1. 假設存在 $M, t_0 > 0$ ， $s_0 \in \mathbb{R}$ 使得分段連續函數 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ 滿足條件

$$|f(t)| \leq Me^{s_0 t}, \quad \forall t \geq t_0$$

則該函數必為可拉氏變換函數。

假設 $f(t)$ 為可拉氏變換函數並定義 $F(s) = \mathcal{L}[f(t); s]$ ，此時稱函數 $f(t)$ 的定義域為時域 (time domain)，稱函數 $F(s)$ 的定義域為頻域 (frequency domain)。

命題 1. 令 α 為任意常數且 f, g 皆為可拉氏變換函數，拉氏變換存在下列性質：

1. 拉氏變換為線性算子，即

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + g(t); s] = \alpha \mathcal{L}[f(t); s] + \mathcal{L}[g(t); s]$$

- (a) 若 f 可微且 $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ 存在，則

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t); s] = s\mathcal{L}[f(t); s] - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$$

- (b) 當 $h > 0$ ，則

$$\mathcal{L}[f(t-h); s] = e^{-sh} \mathcal{L}[f(t); s] + e^{-sh} \int_{-h}^0 f(t)e^{-st} dt$$

(c) 定義 $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ 為函數 f 與 g 的摺積，因此

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau; s\right] = \mathcal{L}[f(t); s]\mathcal{L}[g(t); s]$$

2.2 Lambert W-函數

W-函數為滿足方程

$$W(z)e^{W(z)} = z$$

的函數 W ，不難看出其為

$$f(w) = we^w, \quad \forall w \in \mathbb{C}$$

的反函數。考慮定義在 \mathbb{R} 上的 W ，因其在 $[-e^{-1}, 0)$ 存在兩個值，因此定義值域大於 -1 的部分為分支 0 的 W-函數，其餘的部分為分支 -1 的 W-函數，分別被標記為 W_0 與 W_{-1} 。考慮定義在 \mathbb{C} 上的 W ，若以 Langrange Inversion Theorem 在 $z = 0$ 上展開，定義 W-函數的主分支，也就是分支 0 的 W-函數 (principal branch, branch 0) 為 [3, 4]

$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n.$$

定義複數值對數函數 (complex logarithm) 為 $\log z = |z| + i\text{Arg}(z)$ ，其中 z 為複數且 $\text{Arg}(z) \in [-\pi, \pi)$ 為複數 z 的幅角，當 z 的實部趨近於無限大，對任意整數 k ，定義分支 k 的 W-函數為 [3, 5]

$$W_k(z) = L_1 - L_2 + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell C_{\ell m}}{m!} L_1^{-\ell-m} L_2^m$$

其中 $L_1 = \log z + 2\pi ik$ ， $L_2 = \log L_1$ 且 $C_{\ell m}$ 為第一型 Stirling 數 [6]，因此定義在 \mathbb{C} 上的 W-函數存在可數個分支。目前 W-函數的值可由數學軟體計算，如 MATLAB 指令 `lambertw`、Wolfram Mathematica 指令 `ProductLog` 和 Maple 指令 `LambertW` 等帶入所求分支計算而得。

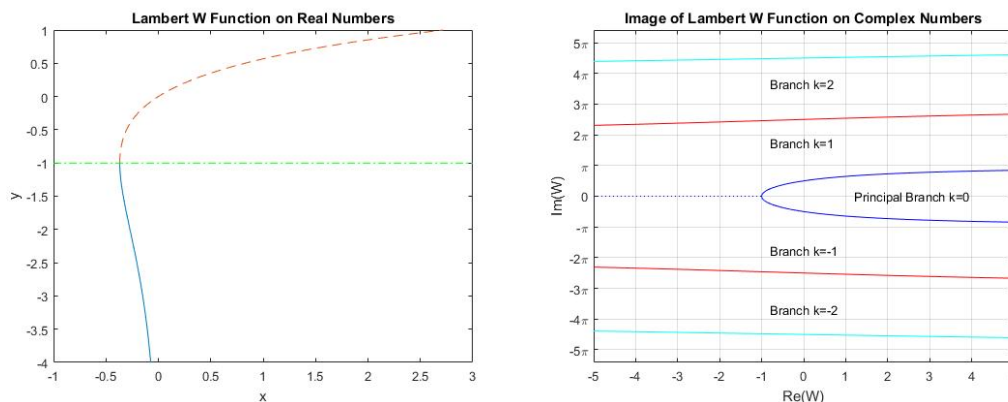


圖 1: 左圖是定義 W -函數在實數上的情形, $y = -1$ 以上的部分為分支 0, 以下為分支 -1 。右圖為定義在複數上的 W -函數值域, 各分支的值域幾乎互斥; 準確地說, 撇除相鄰分支值域的交界, 各分支的值域互斥。

2.3 特徵方程與系統穩定

令 $h > 0$, $a, a_1, \dots, a_M \in \mathbb{R}$, 考慮線性時滯微分方程

$$\dot{x}(t) = ax(t) + \sum_{r=1}^M a_r x(t - rh)$$

定義其特徵方程為

$$s - a - \sum_{r=1}^M a_r e^{-srh} = 0$$

稱該方程的解為系統特徵值 (eigenvalues)。令 \mathcal{I} 為所有系統特徵值的標號所呈集合, 則特徵方程有解 $S_\tau, \forall \tau \in \mathcal{I}$, 此時得到時滯方程的公式解為

$$x(t) = \sum_{\tau \in \mathcal{I}} p_\tau(t) e^{S_\tau t} C_\tau$$

其中 $p_\tau(t)$ 為最高次項為 S_τ 的重根數的多項式, C_τ 為常數, 由系統前導條件決定。

假設所有係數 C_τ 皆位於某個圓盤內, 不難看出當所有 S_τ 的實部小於或等於 0 時, $x(t)$ 的值將會介於某段實數區間內, 即存在 $M > 0$ 使得 $|x(t)| \leq M$, 稱此現象為系統穩定, 若所有 S_τ 的實部皆小於 0, 當時間 t 越接近無窮遠處, 函數 $x(t)$ 與 x 軸越接近, 稱此現象為漸進穩定 (asymptotical stability)。

定義 2. 若線性時滯微分方程的特徵方程的解實部均小於或等於 0，則系統穩定；若特徵方程的解實部皆小於 0，系統為漸進穩定；倘若有一解的實部大於 0，則為不穩定系統。

三、單一時滯微分方程

令 $h > 0$, $a, a_1 \in \mathbb{R}$, 考慮單一時滯微分方程

$$\dot{x}(t) = ax(t) + a_1x(t-h) + u(t) \quad (3.1)$$

其中 u 為輸入, x 為輸出, 即時間響應 (time domain response)。令 $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(t)$ 為在 $[-h, 0]$ 上連續的函數, 設置前導條件 (preshape function):

$$x(0) = x_0, \quad (3.2)$$

與對所有 $t \in [-h, 0)$

$$x(t) = g(t). \quad (3.3)$$

此時允許系統在 $t = 0$ 時可以不連續, 即 $g(0)$ 不需要等於 x_0 。系統穩定的條件為系統特徵值的實部小於或等於 0。

3.1 拉氏變換求頻域響應

令 $X(s) = \mathcal{L}[x(t); s]$, $U(s) = \mathcal{L}[u(t); s]$ 且定義 $G(s) = \int_{-h}^0 g(t)e^{-st} dt$ 為函數 $g(t)$ 在區間 $[-h, 0]$ 上的拉氏變換, 若對 (3.1) 進行拉氏變換, 得到

$$sX(s) - x_0 = aX(s) + a_1e^{-sh}X(s) + a_1e^{-sh}G(s) + U(s).$$

將上式整理為

$$(s - a - a_1e^{-sh})X(s) = x_0 + a_1e^{-sh}G(s) + U(s),$$

因此系統在頻域上的響應可以表示為

$$X(s) = \bar{\Psi}(s)x_0 + \bar{\Psi}(s)a_1e^{-sh}G(s) + \bar{\Psi}(s)U(s), \quad (3.4)$$

其中

$$\bar{\Psi}(s) = \frac{1}{s - a - a_1 e^{-sh}}. \quad (3.5)$$

假設存在函數 $\Psi(t)$ 滿足 $\bar{\Psi}(s) = \mathcal{L}[\Psi(t); s]$ ，稱此函數為系統核函數 (kernel function)，因此系統的時間響應為

$$x(t) = \Psi(t)x_0 + \mathcal{L}^{-1}[\bar{\Psi}(s)a_1 e^{-sh}G(s)] + \int_0^t \Psi(t - \tau)u(\tau)d\tau. \quad (3.6)$$

若要得函數 $x(t)$ 的解析形式，需先得到函數 $\Psi(t)$ 的解析形式，此外，(3.6) 第二項的拉氏逆變換並不直觀。

3.2 推導時間響應

已知系統 (3.1) 的特徵方程為

$$s - a - a_1 e^{-sh} = 0, \quad (3.7)$$

經整理過後得到

$$(s - a)he^{(s-a)h} = a_1 he^{-ah}. \quad (3.8)$$

令 W 為任意分支的 W-函數，因此 $(s - a)h = W(a_1 he^{-ah})$ ，因 W-函數總共有可數個分支，因此對任意 $k \in \mathbb{Z}$ ，特徵方程有解

$$S_k = \frac{1}{h}W_k(a_1 he^{-ah}) + a. \quad (3.9)$$

已知各分支的 W-函數，其值域分割整個複數平面，除了兩相鄰分支值域的邊界，其值不會重複，假設各項 S_k 均為單根，即 $W_k(a_1 he^{-ah})$ 不位在該分支值域的邊界，因此各項 S_k 與特徵方程有下列關係：

定理 2. 對所有 $k \in \mathbb{Z}$ ， S_k 皆為方程 (3.7) 的單根，存在唯一一組常數 $\{C_k \in \mathbb{C} \mid \forall k \in \mathbb{Z}\}$ 使得

$$\frac{1}{s - a - a_1 e^{-sh}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{C_k}{s - S_k}, \quad C_k = \frac{1}{1 + a_1 h e^{-S_k h}}. \quad (3.10)$$

同理，假設 $f(s)$ 為可解析函數且任意 S_k 皆不為函數 $f(s)$ 的根，因此存在唯一一組常數

$\{C_k^I \in \mathbb{C} \mid \forall k \in \mathbb{Z}\}$ 使得

$$\frac{f(s)}{s - a - a_1 e^{-sh}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{C_k^I}{s - S_k}, \quad C_k^I = \frac{f(S_k)}{1 + a_1 h e^{-S_k h}}. \quad (3.11)$$

定理2 之證明置於附錄 附錄 A 中。從此定理得到

$$\bar{\Psi}(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{C_k}{s - S_k}, \quad (3.12)$$

且

$$\bar{\Psi}(s) a_1 e^{-sh} G(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{C_k a_1 e^{-S_k h} G(S_k)}{s - S_k}. \quad (3.13)$$

對上述二式進行拉氏逆變換，得到

$$\Psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{S_k t} C_k, \quad (3.14)$$

與

$$\mathcal{L}^{-1}[\bar{\Psi}(s) a_1 e^{-sh} G(s)] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{S_k t} C_k a_1 e^{-S_k h} G(S_k). \quad (3.15)$$

因此 (3.6) 的拉氏逆變換為

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{S_k t} C_k (x_0 + a_1 e^{-S_k h} G(S_k)) + \int_0^t \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{S_k(t-\tau)} C_k u(\tau) d\tau, \quad (3.16)$$

此為系統 (3.1) 的時間響應。

3.3 範例說明

考慮單一時滯系統

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) - x(t-1) + \cos t, \quad t > 0, \\ x(t) &= 1, \quad t \in [-1, 0]. \end{aligned}$$

此系統在 $t = 0$ 的時候連續，因此 $x_0 = x(0) = 1$ ，觀察 S_0

$$S_0 = W_0(-e) - 1 \approx -0.6050 + 1.7882i,$$

因其他分支的 S_k 實部都比 S_0 小，該系統為漸進穩定，取 $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ ，對應之 S_k 與 C_k 如表 1。已知 $x_0 = 1$ ， $G(s) = \int_{-1}^0 e^{-st} dt$ ，此時時間響應的近似值為

$$x(t) \approx \sum_{k=-3}^2 e^{S_k t} C_k (1 - e^{-S_k t} \int_{-1}^0 e^{-S_k t} dt) + \int_0^t \sum_{k=-3}^2 e^{S_k(t-\tau)} C_k \cos \tau d\tau.$$

上式的實際結果在圖 2，虛線部分為 MATLAB 指令 `dde23` 得到的近似解。我們可將 `dde23` 得到的近似解視為相對正確的解，上式計算結果的差異，可當成判斷上式的正確性。從此圖看來兩者幾乎一致，可知只要增加特徵值的個數，則計算的時間響應會愈來愈貼近真正的響應。

	$k = 0, -1$	$k = 1, -2$	$k = 2, -3$
S_k	$-0.6050 \pm 1.7882i$	$-2.0528 \pm 7.7184i$	$-2.6474 \pm 14.0202i$
C_k	$0.2712 \mp 0.3477i$	$-0.0009 \mp 0.1296i$	$-0.0033 \mp 0.0712i$

表 1: 單時滯系統之特徵值 S_k 與對應的響應係數 C_k , $k = 2, 1, \dots, -3$ 。

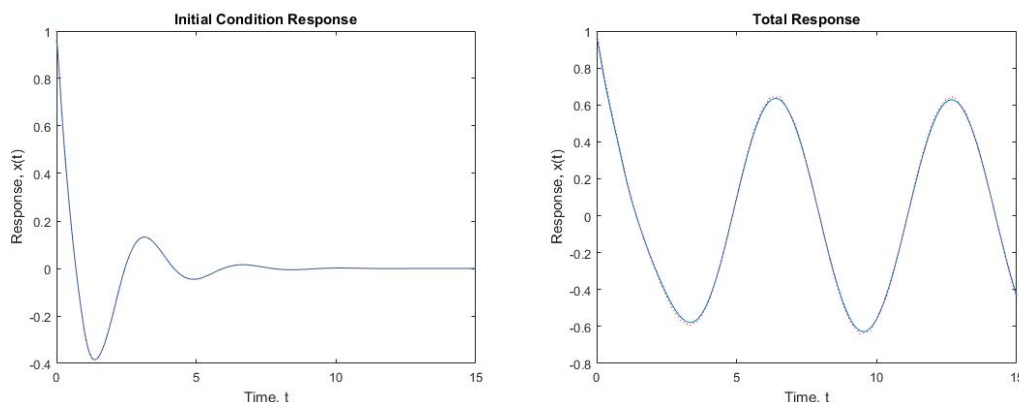


圖 2: 單時滯系統之響應：左為前導條件的效應，右為前導條件與外力 $\cos t$ 合併作用效應。

四、雙時滯微分方程

令 $h > 0$, $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, 考慮有兩項延遲的線性時滯微分方程

$$\dot{x}(t) = ax(t) + a_1x(t-h) + a_2x(t-2h) + u(t) \quad (4.1)$$

其中 u 為輸入, x 為系統的時間響應。令 $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(t)$ 為在區間 $[-2h, 0]$ 上的連續函數, 設前導條件為

$$x(0) = x_0, \quad (4.2)$$

與對所有 $t \in [-2h, 0)$

$$x(t) = g(t). \quad (4.3)$$

此時允許系統在 $t = 0$ 時可以不連續, 即 $g(0)$ 不需要等於 x_0 。系統穩定的條件為系統特徵值的實部小於或等於 0。

4.1 拉氏變換求頻域響應

令 $X(s) = \mathcal{L}[x(t); s]$ 、 $U(s) = \mathcal{L}[u(t); s]$ 且分別定義 $G_1(s) = \int_{-h}^0 g(t)e^{-st}dt$ 與 $G_2(s) = \int_{-2h}^0 g(t)e^{-st}dt$ 為函數 $g(t)$ 在區間 $[-h, 0]$ 與區間 $[-2h, 0]$ 上的拉氏變換, 若對 (4.1) 進行拉氏變換, 得到

$$sX(s) - x_0 = aX(s) + a_1e^{-sh}X(s) + a_2e^{-2sh}X(s) + a_1e^{-sh}G_1(s) + a_2e^{-2sh}G_2(s) + U(s).$$

將上式整理為

$$(s - a - a_1e^{-sh} - a_2e^{-2sh})X(s) = x_0 + a_1e^{-sh}G_1(s) + a_2e^{-2sh}G_2(s) + U(s),$$

因此系統在頻域上的響應可以表示為

$$X(s) = \bar{\Psi}(s)x_0 + \bar{\Psi}(s)a_1e^{-sh}G_1(s) + \bar{\Psi}(s)a_2e^{-2sh}G_2(s) + \bar{\Psi}(s)U(s), \quad (4.4)$$

其中

$$\bar{\Psi}(s) = \frac{1}{s - a - a_1e^{-sh} - a_2e^{-2sh}}. \quad (4.5)$$

令 $\Psi(t)$ 為系統的核函數，即 $\bar{\Psi}(s) = \mathcal{L}[\Psi(t); s]$ ，因此系統的時間響應為

$$x(t) = \Psi(t)x_0 + \mathcal{L}^{-1}[\bar{\Psi}(s)a_1e^{-sh}G_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[\bar{\Psi}(s)a_2e^{-2sh}G_2(s)] + \int_0^t \Psi(t-\tau)u(\tau)d\tau. \quad (4.6)$$

若要得函數 $x(t)$ 的解析形式，需先得到函數 $\Psi(t)$ 的解析形式，此外，(4.6) 第二項與第三項的拉氏逆變換並不直觀。

4.2 系統之時間響應

已知 (4.1) 的特徵方程為

$$s - a - a_1e^{-sh} - a_2e^{-2sh} = 0, \quad (4.7)$$

經整理後得到

$$(s - a)he^{(s-a)h} = a_1he^{-ah} + a_2he^{-ah}e^{-sh}. \quad (4.8)$$

若 $a_2 = 0$ ，上式能以 W-函數求解，考慮 $a_2 \neq 0$ ，令 W 為任意分支的 W-函數，設迭代式

$$\begin{aligned} s^{(n)} &= \frac{1}{h}W(a_1he^{-ah} + a_2he^{-ah}e^{-s^{(n-1)}h}) + a, \\ s^{(0)} &= \frac{1}{h}W(a_1he^{-ah}) + a. \end{aligned} \quad (4.9)$$

對所有 $n \in \mathbb{N}$ 。令函數

$$F(s) = \frac{1}{h}W(a_1he^{-ah} + a_2he^{-ah}e^{-sh}) + a.$$

當對所有 $n \in \mathbb{N}$ ， $|F'(s^{(n-1)})| < 1$ ，上述迭代法收斂。已知 [3]

$$W'(x) = \frac{1}{x} \frac{W(x)}{1 + W(x)},$$

因此迭代法的收斂條件為，對任意 s 為初始條件或迭代過的值，其滿足

$$\left| \frac{a_2he^{-ah}e^{-sh}}{a_1he^{-ah} + a_2he^{-ah}e^{-sh}} \frac{W(a_1he^{-ah} + a_2he^{-ah}e^{-sh})}{1 + W(a_1he^{-ah} + a_2he^{-ah}e^{-sh})} \right| < 1.$$

令 $\{S_k \in \mathbb{C} \mid \forall k \in \mathbb{Z}\}$ 為特徵方程的解，同理可以假設存在一組常數 $\{C_k \in \mathbb{C} \mid \forall k \in \mathbb{Z}\}$ 滿足

$$\frac{1}{s - a - a_1 e^{-sh} - a_2 e^{-2sh}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{C_k}{s - S_k},$$

因此常數 C_k 可以被決定為

$$C_k = \lim_{s \rightarrow S_k} \frac{s - S_k}{s - a - a_1 e^{-sh} - a_2 e^{-2sh}} = \frac{1}{1 + a_1 h e^{-S_k h} + 2a_2 h e^{-2S_k h}}.$$

假設存在一組常數 $\{C_k^I \in \mathbb{C} \mid \forall k \in \mathbb{Z}\}$ 滿足

$$\frac{a_1 e^{-sh} G_1(s) + a_2 e^{-2sh} G_2(s)}{s - a - a_1 e^{-sh} - a_2 e^{-2sh}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{C_k^I}{s - S_k},$$

同理得到常數 C_k^I :

$$C_k^I = \lim_{s \rightarrow S_k} \frac{(s - S_k)(a_1 e^{-sh} G_1(s) + a_2 e^{-2sh} G_2(s))}{s - a - a_1 e^{-sh} - a_2 e^{-2sh}} = \frac{a_1 e^{-S_k h} G_1(S_k) + a_2 e^{-2S_k h} G_2(S_k)}{1 + a_1 h e^{-S_k h} + 2a_2 h e^{-2S_k h}}. \quad (4.10)$$

因此系統之時間響應則為

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{S_k t} C_k (x_0 + a_1 e^{-S_k h} G_1(S_k) + a_2 e^{-2S_k h} G_2(S_k)) + \int_0^t \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{S_k(t-\tau)} C_k u(\tau) d\tau. \quad (4.11)$$

4.3 範例說明

考慮系統

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) - x(t-1) - \frac{1}{2}x(t-1) + \cos t, \quad t > 0, \\ x(t) &= 1, \quad t \in [-2, 0]. \end{aligned}$$

給定任意分支的 W-函數 W_k ，對所有自然數 n ， S_k 的迭代式如下：

$$\begin{aligned} S_k^{(n)} &= W_k\left(-e - \frac{1}{2}e^{S_k^{(n-1)}}\right) - 1, \\ S_k^{(0)} &= W_k(-e) - 1, \end{aligned}$$

取 $N = 5$ ，已知各項 S_k ，因此得到

$$C_k = \frac{1}{1 - e^{-S_k} - e^{-2S_k}}.$$

各項 S_k 與 C_k 的值如表2。已知 $x_0 = 1$ ， $G_1(s) = \int_{-1}^0 x(t)e^{-st} dt$ 與 $G_2(s) = \int_{-2}^0 x(t)e^{-st} dt$ ，此時時間響應的近似值為

$$x(t) \approx \sum_{k=-5}^5 e^{S_k t} C_k (1 - e^{-S_k} G_1(S_k) - \frac{1}{2} e^{-2S_k} G_2(S_k)) + \int_0^t \sum_{k=-5}^5 e^{S_k(t-\tau)} C_k \cos \tau d\tau.$$

上式的實際結果在圖3，虛線部分為 MATLAB 內建指令 dde23 得到的系統近似解。預期當上式之特徵值個數增加，應該會讓兩解之間的差距變小。

	$k = 0$	$k = \pm 1$	$k = \pm 2$
S_k	$-0.2750 + 1.4752i$	$-1.1468 \pm 7.2401i$	$-1.5075 \pm 13.4657i$
C_k	$0.2763 - 0.1759i$	$0.0170 \mp 0.0804i$	$0.0050 \mp 0.0421i$
	$k = \pm 3$	$k = \pm 4$	$k = \pm 5$
S_k	$-1.7229 \pm 19.7266i$	$-1.8759 \pm 25.9973i$	$-1.9944 \pm 32.2723i$
C_k	$0.0025 \mp 0.0282i$	$0.0016 \mp 0.0211i$	$0.0011 \mp 0.0169i$

表 2: 雙時滯系統之特徵值 S_k 與對應的響應係數 C_k , $k = 5, 4, \dots, -4, -5$ 。

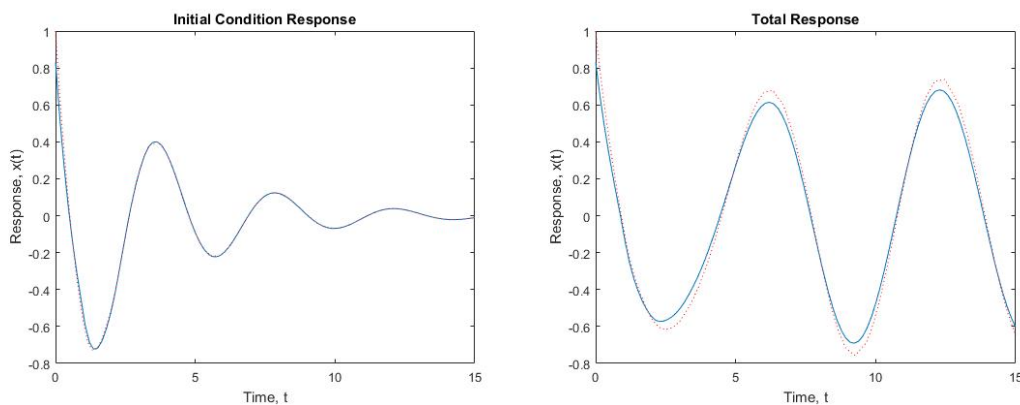


圖 3: 雙時滯系統之響應: 左為前導條件的效應, 右為前導條件與外力 $\cos t$ 合併作用效應。

參考文獻

- [1] Asl, F. M. and Ulsoy, A. G. (2003). Analysis of a system of linear delay differential equations, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* **125**, 2, pp. 215-223 **1**
- [2] Bellman, R. E. and Cooke, K. L. (1963). *Differential-Difference Equations* (Academic Press, New York). **1**
- [3] Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E. G., Jeffrey, D. J. and Knuth, D. E. (1996). On the Lambert W function, *Advances in Computational Mathematics* **5**, 4, pp. 329-359. **1, 3, 10**
- [4] Carathéodory, C. (1954). *Theory of Functions of a Complex Variable*, Vol **1** (Chelsea, New York). **3**
- [5] De Bruijn, N. G. (1961). *Asymptotic Methods in Analysis* (North-Holland). **3**
- [6] Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O. (1994). *Concrete Mathematics* (Addison-Wesley). **3**
- [7] Yi, S. and Ulsoy, A. G. (2006). Solution of a system of linear delay differential equations using the matrix Lambert function, in *Proceedings of 2006 American Control Conference, Minneapolis, MN, 2006 June*, pp. 2433-2438. **1**
- [8] Yi, S., Ulsoy, A. G. and Nelson, P. W. (2006). Solution of systems of linear delay differential equations via Laplace transformation, in *Proceedings of 45th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, CA, DEC. 2006*, pp. 2535-2540. **1**
- [9] Yi, S., Nelson, P. W., and Ulsoy, A. G. (2007). *Time-Delay Systems: Analysis and Control using the Lambert W Function* (World Scientific). **1**
- [10] Malek-Zavarei, M. and Jamshidi, M. (1987). *Time-Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications* (Elsevier Science Pub., New York, U.S.A.). **1**
- [11] 郭威志 (2004): 矩陣型的 LambertW-函數及其應用於時滯系統穩定性分析 (東海大學碩士論文, 指導教授: 黃皇男)

A. 定理 2 的證明

證明: 考慮方程 (3.10) 的存在性, 即計算

$$\lim_{s \rightarrow S_k} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{s - a - a_1 e^{-sh}}{s - S_\ell} C_\ell$$

因 S_k 是方程 $s - a - a_1 e^{-sh} = 0$ 的根, 因此上式可以寫為

$$\lim_{s \rightarrow S_k} \frac{s - a - a_1 e^{-sh}}{s - S_k} \frac{1}{1 + a_1 h e^{-S_k h}}$$

又因為 S_k 同時為上式分子分母的根, 由羅必達法則得

$$\lim_{s \rightarrow S_k} (1 + a_1 h e^{-sh}) \frac{1}{1 + a_1 h e^{-S_k h}} = 1$$

因此係數 C_k 存在。

因 S_k 是 $s - a - a_1 e^{-sh} = 0$ 的單根, (3.10) 左邊在 $s = S_k$ 的 Laurent 展開為

$$\frac{1}{s - a - a_1 e^{-sh}} = \frac{a_{-1}}{s - S_k} + a_0 + a_1(s - S_k) + a_2(s - S_k)^2 + \dots \quad (\text{A.1})$$

因此

$$a_{-1} = \lim_{s \rightarrow S_k} \frac{s - S_k}{s - a - a_1 e^{-sh}} = C_k$$

對任意整數 $\ell \neq k$, 存在

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_\ell - s} &= \frac{1}{S_\ell - S_k - (s - S_k)} = \frac{1}{S_\ell - S_k} \frac{1}{1 - \frac{s - S_k}{S_\ell - S_k}} \\ &= \frac{1}{S_\ell - S_k} \left(1 + \frac{s - S_k}{S_\ell - S_k} + \left(\frac{s - S_k}{S_\ell - S_k} \right)^2 + \dots \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(s - S_k)^j}{(S_\ell - S_k)^{j+1}} \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{C_\ell}{s - S_\ell} = \frac{C_k}{s - S_k} + \sum_{\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{k\}} \frac{(-C_\ell)}{S_\ell - s} \quad (\text{A.2})$$

$$= \frac{C_k}{s - S_k} + \sum_{\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{k\}} (-C_\ell) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(s - S_k)^j}{(S_\ell - S_k)^{j+1}} \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{C_k}{s - S_k} + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{k\}} \frac{(-C_\ell)}{(S_\ell - S_k)^{j+1}} \right) (s - S_k)^j \quad (\text{A.4})$$

因 Laurent 展開的結果是唯一的，因此上式為 (3.10) 等式右邊在 $s = S_k$ 的 Laurent 展開，同時因為 (A.1) 與 (A.2) 相等，因此係數 C_k 是唯一的。

令

$$p(s) = \frac{s - a - a_1 e^{-sh}}{f(s)}$$

同證明 (3.10) 的過程，假設可以找到一組係數 $\{C_k^I \in \mathbb{C} \mid \forall k \in \mathbb{Z}\}$ 使得下列方程成立

$$\frac{1}{p(s)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{C_k^I}{s - S_k}, \quad C_k^I = \frac{f(S_k)}{1 + a_1 h e^{-S_k h}} \quad (\text{A.5})$$

此時得到

$$\lim_{s \rightarrow S_k} \frac{s - a - a_1 e^{-sh}}{(s - S_k) f(s)} C_k^I = 1$$

因此原假設成立。對 (A.5) 左右兩邊同時進行 Laurent 展開，得到係數 C_k 是唯一的，得證。 \square

On the Solution of Delay Differential Equations via Lambert W Functions

Chur-Jen Chen* Huang-Nan Huang* Bin-YanYang*

Abstract

For single delay systems, since the state transition function is consecutively obtained by integrating interval by interval and hence the response constructed by the state transition function is only piecewise differentiable. On the other hand, the response of single delay system will be differentiable one if it is constructed via the Lambert W function. In this work, we construct the state transition function by Lambert W function with the aid of Laplace transform together with Laurent series. Afterall the time response function for multiple delay systems is then constructed. This function can be further applied to the stability analysis and controller synthesis.

Keywords: time delay system, Lambert W function, state transition function, Laplace transform

*Department of Applied Mathematics, Tunghai University, Taichung 40704, Taiwan