東海科學第 2 卷 :55−68
民國八十九年七月出版

用 Mathematica 對自然數次方和之探討

沈淵源*

摘　要

設 n,k 爲正整數 $(k>1)$。令 $S_n(k)$ 爲前 $k-1$ 個自然數的 n 次方和。我們試著以最原始的方法 (其觀念源自 Jacques Bernoulli)，用數學的套裝軟體 Mathematica 爲實驗的工具，透過其符號計算的功能來引導我們探討 $S_n(k)$ 的一個公式 :

$$S_n(k)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i\,k^{n+1-i},$$

此處 B_i 爲 Bernoulli 數。

1 引　言

請計算前一千個自然數的十次方和 :

$$1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+1000^{10}$$

當你遇到這樣問題的時候 , 你會有怎麼樣的反應呢？可能你的第一個反應是期待 Mathematica 幫幫忙 ! 那麼就讓我們趕快進入 Mathematica 的世界中吧。

MATHEMATICA 其指令如下 :

```
Sum[a^10,{a,1,1000}]
```

十分之一秒鐘不到 , Mathematica 就告訴你答案是 :

91409924241424243424241924242500

實在太美了 , 太令人興奮了！再來呢？可能你期待有個公式 , 免得每次要勞駕 Mathematica。三百多年前 Jacques Bernoulli (1654–1705) 說他可以在半刻鐘之內算出這個和 , 你呢？除了上面兩個期待之外 , 還有其他的妙計嗎？

*東海大學數學系

我們都很熟悉, 前 $k-1$ 個自然數的和、平方和、及其立方和之公式:

$$\begin{aligned}
1+2+3+\cdots+(k-1) &= \frac{1}{2}\,k^2-\frac{1}{2}\,k,\\
1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2 &= \frac{1}{3}\,k^3-\frac{1}{2}\,k^2+\frac{1}{6}\,k,\\
1^3+2^3+3^3+\cdots+(k-1)^3 &= \frac{1}{4}\,k^4-\frac{1}{2}\,k^3+\frac{1}{4}\,k^2.
\end{aligned}$$

還記得當初你是怎麼導出這些公式的嗎? 當你在國中的時候, 不費吹灰之力的, 就可以導出一次方和的公式。令

$$S_1=1+2+3+\cdots+(k-1),$$

將此和之次序倒過來書寫, 我們就有

$$S_1=(k-1)+(k-2)+(k-3)+\cdots+1,$$

再把這兩種寫法按序將對應項相加得到 k, 所以就有下面的等式

$$2S_1=k+k+k+\cdots+k.$$

這裡共有 $k-1$ 個 k, 因此 S_1 的公式馬上就在我們眼前。

怎麼樣把這個方法推廣到平方和呢? 這下子你可就灰頭土臉的了。怎麼辦呢? 山不轉, 但路可以轉, 所以人生的經歷告訴我們, 是路轉的時候了。所謂路轉者也, 就是方法要變囉。一次方來自兩個連續整數的平方差 $\cdots$,

$$(j+1)^2-j^2=2j+1.$$

若將對應於 $j=0,1,2,\cdots,k-1$ 的 k 個等式相加, 等式的左方對消之後只剩 k^2, 而等式的右方有兩倍的一次方和加上 k 個 1。所以我們有

$$k^2=2[1+2+3+\cdots+(k-1)]+k\cdot 1,$$

整理後可得到

$$1+2+3+\cdots+(k-1)=\frac{1}{2}\,k^2-\frac{1}{2}\,k.$$

山路崎嶇, 或許你會覺得太浪費時間, 但這是確定可以抵達山頂的一個方法 (當你搭上阿里山的登山鐵道時, 必有同感)。如法泡製, 我們可以處理平方和的問題:

$$(j+1)^3-j^3=3j^2+3j+1.$$

同樣地, 將對應於 $j=0,1,2,\cdots,k-1$ 的 k 個等式相加, 可得

$$k^3 = 3[1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2]+3[1+2+3+\cdots+(k-1)]+k\cdot 1,$$

代入前面一次方和的公式 , 化簡後 , 我們有

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2 = \frac{1}{3}\,k^3-\frac{1}{2}\,k^2+\frac{1}{6}\,k.$$

重複此法 , 十次之後我們就可以得到 $1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+(k-1)^{10}$ 的公式 , 令 $k=1001$, 即可得到結果 . 但不管你速度多快 , 也無法在半刻鐘之內完成 , 你還是輸給了 Jacques Bernoulli。爲什麼呢？因爲我們的方法是登山鐵道的辦法 , 到第二階 , 得先經過第一階；是可以抵達山頂 , 但太不經濟了！是否真的如此呢？最後我們再作評論。

Jacques Bernoulli 之所以與眾不同 , 在於他用分析的方法來解決代數的問題 , 他不搭火車而是搭直昇機! 他聲稱有唯一的一個首項係數爲 1 之 n 次多項式 $B_n(x)$ 使得

$$1^n+2^n+3^n+\cdots+(k-1)^n = \int_0^k B_n(x)dx\,.$$

其實 Jacques Bernoulli 的慧眼 , 只需要微積分的知識與訓練就可具有的。還沒有作實驗之前 , 請先思考下面兩個問題：

(a) 可否設計一個實驗來證明你也可以當 Jacques Bernoulli 呢？

(b) 很自然的 , 上面所定義的這些多項式 $B_n(x)$ 我們就稱爲 Bernoulli 多項式。你能用 Mathematica 設計一個實驗來計算這些多項式 $B_n(x)$ 嗎?

令 $S_n(k)$ 爲前 $k-1$ 個自然數的 n 次方和。我們的目標是 :

找出 $S_n(k)$ 的公式 (不單單是遞回公式而已)。

由前面三個 $S_n(k)$ 的公式，不難猜出其形式爲

$$S_n(k) = \frac{1}{n+1}\,k^{n+1}-\frac{1}{2}\,k^n+k(\cdots), \tag{1.1}$$

這就是 Jacques Bernoulli 的慧眼所看到的。爲了確認其形式的確如此，而非由於我們的想像力太過豐富 (才觀察三個例子就知道一般的公式)，所以讓我們多觀察幾個 $S_n(k)$ 的公式吧！

2 實驗一 (Jacques Bernoulli 的慧眼)

Mathematica 不單單能做數值計算 , 並且也能做符號計算。

(a) 首先在 Mathematica 中定義函數 $S_n(k) = S[n,k]$, 然後列出 $S[n,k]$, $n = 1,2,3,\cdots,10$。

MATHEMATICA 其指令如下 :

```
S[n_,k_]:=Expand[ Sum[a^n,{a,1,k-1}]]
ColumnForm[Table[{n,S[n,k]},{n,1,10}]]
```

(b) 觀察其形式可得到怎麼樣的規則呢 ?

(c) 若將 $S[n,k]$ 對 k 來微分 , 觀察其形式又如何呢 ?

MATHEMATICA 其指令如下 :

```
Table[{n,D[S[n,k],k]},{n,1,10}]//MatrixForm
```

(d) 你也可以當 Jacques Bernoulli 嗎 ?

3 實驗一之結果與分析

實驗一 (a) 的輸出結果如下 :

```
{1, -k/2 + k^2/2}

{2, k/6 - k^2/2 + k^3/3}

{3, k^2/4 - k^3/2 + k^4/4}

{4, -k/30 + k^3/3 - k^4/2 + k^5/5}

{5, -k^2/12 + (5 k^4)/12 - k^5/2 + k^6/6}

{6, k/42 - k^3/6 + k^5/2 - k^6/2 + k^7/7}
```

```
{7, k^2/12 - (7 k^4)/24 + (7 k^6)/12 - k^7/2 + k^8/8}

{8, -k/30 + (2 k^3)/9 - (7 k^5)/15 + (2 k^7)/3 - k^8/2 + k^9/9}

{9,(-3 k^2)/20 + k^4/2 - (7 k^6)/10 + (3 k^8)/4 - k^9/2 + k^10/10}

{10,  (5 k)/66 - k^3/2 + k^5 - k^7 + (5 k^9)/6 - k^10/2 + k^11/11}
```

由此實驗 , 我們有下面三個猜測 (此即式 (1.1) 所要表達的內容)：

(a) $S_n(k)$ 爲一 k 的 $n+1$ 次多項式，其首項係數爲 $\dfrac{1}{n+1}$ ，

(b) $S_n(k)$ 的常數項爲 0, 亦即 $S_n(0)=0$ ，

(c) $S_n(k)$ 的 k^n 項之係數爲 $-\dfrac{1}{2}$ 。

很顯然的 , (a) 與 (b) 可合併而成下面的猜測：如上所言這就是 Jacques Bernoulli 的慧眼所觀察出來的。

<u>猜測</u>： 存在唯一的一個首項係數爲 1 之 n 次多項式 $B_n(x)$ 使得

$$S_n(k)=1^n+2^n+3^n+\cdots+(k-1)^n=\int_0^k B_n(x)dx\,. \tag{3.1}$$

怎麼證明這個猜測呢？其實在前面所提到的登山鐵道之辦法裏已暗藏著證明的玄機。且看：

$$(j+1)^n-j^n=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}j^i\,.$$

將對應於 $j=0,1,2,\cdots,k-1$ 的 k 個等式相加 , 等式的左方對消之後只剩 k^n, 而等式的右方則爲 $S_i(k)$ 的線性組合 , 如下所示：

$$k^n=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}S_i(k)\,.$$

將上式的 n 取代爲 $n+1$, 可得

$$k^{n+1}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}S_i(k)=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}S_i(k)+(n+1)S_n(k)\,.$$

所以我們有 $S_n(k)$ 的遞迴公式如下：

$$(n+1)S_n(k) = k^{n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} S_i(k)\ . \tag{3.2}$$

透過這個遞迴公式，利用數學歸納法，很容易的我們就可以證明上面的猜測都是對的 (請動手證明看看吧 !)，換句話說這些猜測其實都是定理。所以我們的目標現在已變成 :

找出 $B_n(k)$ 的公式。

請看下面的實驗 :

4 實驗二 (Bernoulli 多項式 $B_n(x)$)

由定義馬上可以看出 Bernoulli 多項式必定會滿足下面的等式：

$$\int_k^{k+1} B_n(x)dx = k^n. \tag{4.1}$$

事實上，對任何正整數 n, 存在唯一的一個首項係數爲 1 之 n 次多項式滿足這個方程式，而其中的 k 可以是任何的數 (不僅限於正整數而已)。

(a) 用 Mathematica 中符號計算的功能 , 透過公式 (4.1) 計算 $B_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \cdots, 10$。

MATHEMATICA 其指令如下 :

```
B[n_,x_]:=Sum[B[i]*x^i,{i,0,n-1}]+x^n
poly[n_]:=Series[Integrate[B[n,x],{x,k,k+1}]-k^n,{k,0,n}]
m=MatrixForm[Table[{sols=Solve[LogicalExpand[poly[i]==0]],
B[i,x]/.sols[[1]]}, {i,1,10}]]
```

(b) 請畫出 $B_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \cdots, 10$ 的圖形。

MATHEMATICA 其指令如下 (注意 $B_n(x) =$ `m[[1,n]][[2]]`):

```
Plot[m[[1,1]][[2]],{x,-10,10}] Plot[m[[1,2]][[2]],{x,-10,10}]
Plot[m[[1,3]][[2]],{x,-10,10}] Plot[m[[1,4]][[2]],{x,-10,10}]
Plot[m[[1,5]][[2]],{x,-10,10}] Plot[m[[1,6]][[2]],{x,-10,10}]
Plot[m[[1,7]][[2]],{x,-10,10}] Plot[m[[1,8]][[2]],{x,-10,10}]
Plot[m[[1,9]][[2]],{x,-10,10}] Plot[m[[1,10]][[2]],{x,-10,10}]
```

或是放在同一座標平面上

```
Plot[{m[[1,1]][[2]],m[[1,2]][[2]],m[[1,3]][[2]],
      m[[1,4]][[2]],m[[1,5]][[2]],m[[1,6]][[2]],
      m[[1,7]][[2]],m[[1,8]][[2]],m[[1,9]][[2]],
      m[[1,10]][[2]]},{x,-10,10},
  PlotStyle->{GrayLevel[0],GrayLevel[.5],RGBColor[0.5,0,0],
  RGBColor[1,0,0],RGBColor[0,0.5,0],RGBColor[0,1,0],
  RGBColor[0,0,0.5]}],RGBColor[0,0,1],
  RGBColor[1,1,0],RGBColor[1,0,1]}]
```

(c) 由這些計算或圖形 , 你能看出一般 $B_n(x)$ 的公式嗎 ? 困難何在 ?

5 實驗二之結果與分析

在實驗二中，我們試著要由前面幾個多項式 $B_n(x)$, $n = 1,2,\cdots,10$ 來預測其一般的公式。且看：

$$
\begin{aligned}
B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x, \\
B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}, \\
B_7(x) &= x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x, \\
B_8(x) &= x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30},
\end{aligned}
$$

$$B_9(x) = x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 - 2x^3 - \frac{3}{10}x.$$

但不管由其形式或圖形，實在是歸納不出什麼東西來。目前我們還沒有用到任何分析中較重要的結果，所以我們不妨先詳細觀察一下公式 (4.1)，其左邊是 $B_n(x)$ 在區間 $[k, k+1]$ 的定積分 , 右邊則是 k^n; 所以可看成是 k 的函數。根據微積分基本定理 , 我們有

$$B_n(k+1) - B_n(k) = nk^{n-1}, \tag{5.1}$$

因此可得

$$\begin{aligned}
&[B_n(1) - B_n(0)] + [B_n(2) - B_n(1)] + \cdots + [B_n(k) - B_n(k-1)] \\
&= n[0^{n-1} + 1^{n-1} + 2^{n-1} + \cdots + (k-1)^{n-1}],
\end{aligned}$$

化簡之後我們有

$$\frac{B_n(k) - B_n(0)}{n} = S_{n-1}(k) = \int_0^k B_{n-1}(x)dx. \tag{5.2}$$

所以得到相鄰兩個 Bernoulli 多項式的關係如下 :

$$B_n(x) = n\int_0^x B_{n-1}(t)dt + B_n(0), \tag{5.3}$$

這幾乎是 $B_n(x)$ 的一個遞迴公式。另一方面，方程式 (5.2) 中的第一個等式告訴我們下面的公式 :

$$S_n(k) = \frac{B_{n+1}(k) - B_{n+1}(0)}{n+1}. \tag{5.4}$$

由實驗二我們知道

$$B_9(x) = x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{3}{10}x,$$

如果我們得知 $B_{10}(0) = \frac{5}{66}$, 那麼要找 $B_{10}(x)$ 只需將 $B_9(x)$ 積分後乘以 10, 再加上 $\frac{5}{66}$:

$$\begin{aligned}
B_{10}(x) &= 10\left(\frac{1}{10}x^{10} - \frac{1}{2}x^9 + \frac{3}{4}x^8 - \frac{7}{10}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{20}x^2\right) + \frac{5}{66} \\
&= x^{10} - 5x^9 + \frac{15}{2}x^8 - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{66}.
\end{aligned}$$

所以如果我們知道每個多項式 $B_n(x)$ 的常數項 :

$$B_1(0) = -\frac{1}{2}, \quad B_2(0) = \frac{1}{6}, \quad B_3(0) = 0, \cdots,$$

公式 (5.3) 就提供了一個管道 , 可以依次求出你所需要的 Bernoulli 多項式。這些常數項 $B_n(0)$ 我們就稱爲第 n 個 Bernoulli 數 , 以符號 B_n 表示之 :

$$B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_3=0,\quad B_4=-\frac{1}{30}\cdots.$$

其實 , 上面的計算與觀察有點把我們引導到一個錯誤的方向。假如我們先不去管 Bernoulli 數的值，反而使我們更容易得到 Bernoulli 多項式 $B_n(x)$ 的公式。請看下面的實驗 :

6 實驗三 (Bernoulli 多項式 $B_n(x)$ 的公式)

還記得我們的 $B_1(x)$ 等於 $x+B_1$ 嗎 ? 將公式 (5.3) 寫成

$$B_n(x)=n\int_0^x B_{n-1}(t)dt+B_n\ . \tag{6.1}$$

(a) 透過公式 (6.1), 請用 Mathematica 由 $B_1(x)=x+B_1$ 開始 , 依次算出 $B_n(x)$, $n=1,2,3,4,5$, 係數請用 Bernoulli 數表示之。

MATHEMATICA 其指令如下 :

```
B1[x_]:=x+B1
B2[x_]:=Expand[2*Integrate[B1[t],{t,0,x}]+B2]
B3[x_]:=Expand[3*Integrate[B2[t],{t,0,x}]+B3]
B4[x_]:=Expand[4*Integrate[B3[t],{t,0,x}]+B4]
B5[x_]:=Expand[5*Integrate[B4[t],{t,0,x}]+B5]
Print["B1(x) = ", B1[x]]
Print["B2(x) = ", B2[x]]
Print["B3(x) = ", B3[x]]
Print["B4(x) = ", B4[x]]
Print["B5(x) = ", B5[x]]
```

(b) 由這些計算 , 你能看出一般 $B_n(x)$ 的公式嗎 ?

(c) 若用 B^n 來代替 B_n , 你有什麼新發現呢 ?

7 實驗三之結果與分析

現在終於撥開雲霧看見青天了，上面的實驗告訴我們前五個 Bernoulli 多項式爲 :

$$\begin{aligned}
B_1(x) &= x+B_1,\\
B_2(x) &= x^2+2B_1x+B_2,\\
B_3(x) &= x^3+3B_1x^2+3B_2x+B_3,\\
B_4(x) &= x^4+4B_1x^3+6B_2x^2+4B_3x+B_4,\\
B_5(x) &= x^5+5B_1x^4+10B_2x^3+10B_3x^2+5B_4x+B_5,
\end{aligned}$$

這些形式乍看之下不就是二項式定理嗎？仔細觀察則不然，就差那麼一點點而已，若將式中的 B_i 換成 B^i 那就完美無缺了。透過公式 (6.1)，利用數學歸納法可得 $B_n(x)$ 的公式如下：

$$B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_i\,x^{n-i}. \tag{7.1}$$

將公式 (5.4) 與公式 (7.1) 合在一起 , 我們終於得到一個 $S_n(k)$ 的公式：

$$\boxed{S_n(k)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i\,k^{n+1-i}}$$

此公式亦可由公式 (3.1) 與公式 (7.1) 導出來，如下所示：

$$\begin{aligned}
S_n(k) &= \int_0^k B_n(x)\,dx\\
&= \int_0^k\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_i\,x^{n-i}dx\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{B_i\,k^{n+1-i}}{n+1-i}\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i\,k^{n+1-i}.
\end{aligned}$$

剩下的問題就是怎麼樣計算這些 Bernoulli 數。根據定義我們有：

$$B_n=B_n(0)=S_n'(0).$$

在 $S_n(k)$ 的遞迴公式 (3.2) 中，將等式兩側對 k 來微分，可得如下：

$$
\begin{aligned}
&(n+1)B_n(k) = (n+1)k^n - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} B_i(k) \\
&\Longrightarrow (n+1)B_n(0) = (n+1)0^n - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} B_i(0) \\
&\Longrightarrow (n+1)B_n = -\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} B_i.
\end{aligned}
$$

上式即 Bernoulli 數的遞迴公式。此遞迴公式亦可由方程式 (5.1) 得到。在 (5.1) 中，令 $k=0$, 則 $B_n(1)-B_n(0)=0$ 所以有

$$
B_n = B_n(0) = B_n(1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i, \tag{7.2}
$$

因此可得

$$
\begin{aligned}
&B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} B_j = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i + B_{n+1} \\
&\Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i = 0 \\
&\Longleftrightarrow (n+1)B_n = -\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} B_i.
\end{aligned}
$$

如上所觀察到的，形式上我們可將 $B_n(x)$, 及 B_n 的公式寫成：

$$
B_n(x) = (B+x)^n, \quad \text{及} \quad B_n = (B+1)^n,
$$

再將右側按二項式定理展開並將式中所有的 B^i 都換成 B_i 即得公式 (7.1) 及公式 (7.2)，請參閱 [1]。

8 實驗四 (Bernoulli 數 B_n 的遞迴公式)

(a) 由 Bernoulli 數的遞迴公式 , 試寫一程式來計算

$$
B_1, \quad B_2, \quad B_3, \quad \cdots, B_{24}.
$$

MATHEMATICA 其指令如下 :

```
B[n_]:=- Sum[ Binomial[n+1,i]B[i]/(n+1) ,
            {i,0,n-1}]; B[0]=1;
Table[{n,Expand[B[n]]},{n,10}]//MatrixForm
```

(b) 觀察 Bernoulli 數 , 你對 B_{2n+1} 有沒有任何猜測 ?

(c) 由 $S_n(k)$ 的遞迴公式 (3.2), 試寫一程式來計算

$$S_1(k),\quad S_2(k),\quad S_3(k),\quad \cdots, S_{10}(k).$$

MATHEMATICA 令 $S[n] = S_n(k)$，其指令如下 :

```
S[n_]:= (k^(n+1) - Sum[ Binomial[n+1,i]S[i],
            {i,0,n-1}])/(n+1); S[0]=k;
Table[{n,Expand[S[n]]},{n,10}]//MatrixForm
```

(d) 登山鐵道的辦法是否如引言中所提到的太不經濟呢？有了 Mathematica 的提昇，火車一變而成直昇機，你認爲呢？

9 結語 (Bernoulli 的七分半鐘)

由上面的計算得知 ($B_0 = 1$)：

$$B_1 = -\frac{1}{2},\quad B_2 = \frac{1}{6},\quad B_3 = 0,\quad B_4 = -\frac{1}{30},\quad B_5 = 0,$$

$$B_6 = \frac{1}{42},\quad B_7 = 0,\quad B_8 = -\frac{1}{30},\quad B_9 = 0,\quad B_{10} = \frac{5}{66}.$$

其實，Bernoulli 數的分子從 B_{14} 開始就會比分母大，而且愈來差距愈大。請參閱 [4] 之附表一，其中共列出 $B_2, \cdots, B_{124}$ 等 62 個 Bernoulli 數。現在讓我們回到 Bernoulli 當年如何在七分半鐘算出前一千個自然數的十次方和的。我們有

$$\begin{aligned}
S_{10}(k) &= \frac{1}{11}\sum_{i=0}^{10}\binom{11}{i}B_i k^{11-i}\\
&= \frac{1}{11}\left(k^{11} + 11B_1k^{10} + 55B_2k^9 + 330B_4k^7 + 462B_6k^5 + 165B_8k^3 + 11B_{10}k\right)\\
&= \frac{1}{11}k^{11} - \frac{1}{2}k^{10} + \frac{5}{6}k^9 - k^7 + k^5 - \frac{1}{2}k^3 + \frac{5}{66}k.
\end{aligned}$$

所以可得

$$1^{10}+2^{10}+\cdots+1000^{10}=10^{30}+\frac{1}{11}10^{33}-\frac{1}{2}10^{30}+\frac{5}{6}10^{27}-10^{21}+10^{15}-\frac{1}{2}10^{9}+\frac{5}{66}10^{3},$$

這只是個簡單的小學算術問題而已。請看：

```
  1 00000 00000 00000 00000 00000 00000.00
+90 90909 09090 90909 09090 90909 09090.90
-   50000 00000 00000 00000 00000 00000.00
+      83 33333 33333 33333 33333 33333.33
-             10 00000 00000 00000 00000.00
+                    1 00000 00000 00000.00
-                               5000 00000.00
+                                       75.75
------------------------------------------
 91 40992 42414 24243 42424 19242 42500
```

七分半鐘是綽綽有餘的 (請參閱 [2] 之附錄 A)。

參考書目

[1] Apostol, T.: Introduction to Analytic Number Theory, Undergraduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1986 (Third Printing).

[2] Bressoud, D.: A Radical Approach to Real Analysis, MAA, Washington D.C., 1994.

[3] Ireland, K. and Rosen, M.: A Classical Introduction to Modern Number Theory, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1982.

[4] Washington, L.: Introduction to Cyclotomic Fields, 2nd ed., Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1997.

Exploring the Sums of Powers of Consecutive Integers with Mathematica

Yuan-Yuan Shen*

Abstract

Let n, k be positive integers ($k > 1$), and let $S_n(k)$ be the sum of the n-th powers of positive integers up to $k-1$. Following an idea due to Jacques Bernoulli, we are going to use the power of symbolic calculation from a software package called "Mathematica" to explore a formula for $S_n(k)$:

$$S_n(k) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i \, k^{n+1-i},$$

where B_i are the Bernoulli numbers.

*Department of Mathematics, Tunghai University, Taichung 407, TAIWAN