Tunghai Science Vol. 9: 1−8
July, 2007

另一種計算伯努利數的方法

鍾逸修* 劉志璿* 王道明† 胡豐榮*

Abstract

本研究利用連續正整數次方和之擴充函數 $S_k(x),\ k\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}$, 且以黎曼–傑塔函數爲橋樑, 提出伯努利數之簡便計算。研究發現

$$B_{2k}=-\frac{1}{2k+1}\left\{C_{2k}^{2k+1}S_1'(-1)+\sum_{i=1}^{k}C_{2i+1}^{2k+1}S_{2k-2i}'(-1)\right\},\ k\in\mathbb{N};\ B_k=S_k'(-1),\ k=0,1,$$

其中, $S_k'(x)$ 是 $S_k(x)$ 的一階導數, $k\in\mathbb{N}$。
關鍵字: 連續正整數次方和, 黎曼–傑塔, 伯努利數

1 引言

Bernoulli 數 $B_k, k=0,1,2,\cdots$ 乃下式無窮級數中之係數:

$$\frac{s}{e^s-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k s^k}{k!},\ |s|<2\pi.$$

計算 Bernoulli 數在數學研究裡是個古老的課題, 舉凡從純粹的代數到統計的應用都有 Bernoulli 數的蹤影。因而, 研究 Bernoulli 數的方法深具多樣化, 其中最直接的方法是利用泰勒展開式, 也有利用疊代遞迴公式

$$B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}C_i^{n-1}B_i,\ n\in\mathbb{N},\quad B_0=1, \tag{1.1}$$

來計算 [7]。

若利用泰勒展開式來求 B_k, 則必須將 $\frac{s}{e^s-1}$ 微分 k 次, 再令 $s=0$。可想見, 繁瑣的計算是無法避免。另外, 疊代遞迴公式則必須先求出 B_0, 再代入公式中。雖然此法可以不必要計算高次微分, 但 $B_0,B_1,\cdots$ 即便容易計算, 通常算過以後不容易留住印象, 本文有鑑於此, 遂利用連續正整數次方和之擴充函數, 透過 Riemann zeta 函數, 建立另一個計算 Bernoulli 數的方法。

*台中教育大學數學教育系
†東海大學數學系

上述連續正整數次方和之擴充函數 $S_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 之定義如下: $S_0(x)=x$,

$$S_k(x)=\frac{1}{k+1}\left\{(x+1)^{k+1}-\sum_{i=1}^{k}C_{i+1}^{k+1}S_{k-i}(x)-1\right\},\ k\geq 1, \tag{1.2}$$

這裡 $C_m^n=\frac{n!}{m!(n-m)!}$。事實上, 擴充函數 $S_k(x)$ 乃由下式

$$(j+1)^{k+1}-j^{k+1}=C_1^{k+1}j^k+\sum_{i=1}^{k}C_{i+1}^{k+1}j^{k-i},\ k,\ j\in\mathbb{N},$$

經 $j=1$ 到 $j=n$ 加起來得到

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}\left\{(n+1)^{k+1}-\sum_{i=1}^{k}C_{i+1}^{k+1}S_{k-i}(n)-1\right\},\ k\geq 1,\ n\in\mathbb{N}. \tag{1.3}$$

從這裡我們很自然可以想到如何將函數 S_1 之定義域由自然數擴大到實數去, 即令 $S_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 爲 $S_1(x)=\frac{x(x+1)}{2}$, 再由遞迴公式 (1.2) 逐一得出 $k\geq 2$ 時之 $S_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。此時由 (1.2) 不難看出當 x 爲正整數時 (1.2) 式與 (1.3) 式是相等的。因此, $S_2(x)=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6},\ S_3(x)=\frac{x^2(x+1)^2}{4},\ x\in\mathbb{R}$。

本研究發現

$$B_{2k}=-\frac{1}{2k+1}\left\{C_{2k}^{2k+1}S_1'(-1)+\sum_{i=1}^{k}C_{2i+1}^{2k+1}S_{2k-2i}'(-1)\right\},\ k\in\mathbb{N},\ B_k=S_k'(-1),\ k=0,1, \tag{1.4}$$

其中 $S_k'(-1)$ 爲 $S_k(x)$ 之一階導數在 $x=-1$ 之取值。

本文之架構如下: 在第二節裡, 我們實際計算 Bernoulli 數, 藉此突顯 (1.4) 之有效性, 在第三節, 我們給出 (1.4) 的數學證明, 總結則置於第四節。

2 伯努利數的實際計算

爲了驗證本研究所得結果確實達到引言中所言之效果, 本節分別從泰勒展開式, 遞迴公式 (1.1) 與 (1.4) 三個觀點, 計算 $B_0,B_1,B_2,\cdots,B_6$ 如下: 利用泰勒展開式求 Bernoulli 數時, 我們對 $\frac{s}{e^s-1}$ 微分, 令 $s=0$, 即 $B_0=\lim_{s\to 0}\frac{s}{e^s-1}=1$,

$$B_1=\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{e^s-1}\right)_{s=0}=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{e^s-1}\right)_{s=0}=\frac{1}{6},$$

$$B_4=\frac{d^4}{ds^4}\left(\frac{s}{e^s-1}\right)_{s=0}=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{d^6}{ds^6}\left(\frac{s}{e^s-1}\right)_{s=0}=\frac{1}{42}.$$

利用遞迴公式 (1.1) 求 Bernoulli 數時, $B_0 = \lim_{s\to 0} \frac{s}{e^s-1} = 1$,

$$B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = -\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{1} C_i^3 B_i = \frac{1}{6},$$

$$B_4 = -\frac{1}{5}\sum_{i=0}^{3} C_i^5 B_i = -\frac{1}{30},\ B_6 = -\frac{1}{7}\sum_{i=0}^{5} C_i^7 B_i = \frac{1}{42}.$$

利用本研究之公式 (1.4) 求 Bernoulli 數時,

$$B_0 = S_0'(-1) = \frac{d}{dx}(x)_{x=-1} = 1,$$

$$B_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)_{x=-1} = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{3}\left\{C_2^3 S_1'(-1) + C_3^3 S_0'(-1)\right\} = \frac{1}{6},$$

$$\begin{aligned} B_4 &= \frac{1}{5}\left\{C_4^5 S_1'(-1) + \sum_{i=1}^{2} C_{2i+1}^5 S_{2k-2i}'(-1)\right\} = -\frac{1}{30}, \\ B_6 &= \frac{1}{7}\left\{C_6^7 S_1'(-1) + \sum_{i=1}^{3} C_{2i+1}^7 S_{2k-2i}'(-1)\right\} = \frac{1}{42}. \end{aligned}$$

綜合比較上面三種方法, 我們利用遞迴公式 (1.1) 與本研究之方法, 可以很容易計算 Bernoulli 數。雖然, 遞迴公式 (1.1) 與本研究之公式 (1.4) , 本質上是一樣的, 但由於連續正整數次方和擴充函數 $S_0(x) = x,\ S_1(x) = \frac{x(x+1)}{2},\ S_2(x) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$ 及 $S_3(x) = \frac{x^2(x+1)^2}{4}$ 是大家耳熟能詳之公式, 所以即便經過一段時間, 這些大家頗爲熟悉公式, 都能呼之即出, 這使得我們很容易記住 $B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6}$ 之事實。相較於遞迴公式 (1.1), 則無這樣的利點, 這也就是我們於引言所述, 計算後不容易留住印象之緣由。

3 主定理之證明

在主定理證明之前, 爲了讓我們證明主定理思考之脈絡明確化, 底下把主要用來證明主定理之重要事實, 以三個引理的方式呈現, 隨後才進入主定理之證明。

Lemma 3.1 對任何實數 x 及任何常數 t , $|t| < 2\pi$

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k(x)\frac{t^k}{k!} = \frac{e^{t(x+1)} - e^t}{e^t - 1}.$$

Proof: 從 (1.2) 得知

$$(x+1)^{k+1} = 1 + \sum_{i=0}^{k} C_{i+1}^{k+1} S_{k-i}(x) = 1 + (k+1)! \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(i+1)!} \frac{S_{k-i}(x)}{(k-i)!},$$

因此

$$\frac{(x+1)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+1)!} + \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(i+1)!} \frac{S_{k-i}(x)}{(k-i)!}.$$

現在, 將上式的左右同乘上 t^{k+1} , 並且將

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} \frac{S_{k-i}(x) t^{k-i}}{(k-i)!},$$

視爲 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{i+1}}{(i+1)!}$ 和 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{S_i(x) t^i}{i!}$ 的柯西積 (Cauchy product), 可得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x+1)^k \frac{t^k}{k!} = e^t + (e^t - 1) \sum_{k=0}^{\infty} S_k(x) \frac{t^k}{k!}.$$

□

Lemma 3.2 設 k 是一個大於 2 的正整數, 則 $S_k'(-1) = S_k'(0)$。

Proof: 設 $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S_k(x) \frac{T^k}{k!}$, $|T| \leq 2\pi$, 則由引理 3.1 和 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是均勻收斂, 可得到 $\sum_{k=0}^{\infty} S_k'(x) \frac{T^k}{k!} = \frac{T e^{T(x+1)}}{e^T - 1}$, 進一步取 $x = 0$ 可得

$$\frac{T e^T}{e^T - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} S_k'(0) \frac{T^k}{k!}, \quad \frac{T}{e^T - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} S_k'(-1) \frac{T^k}{k!}. \tag{3.1}$$

回顧公式 (3.1) 可得

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ S_k'(0) - S_k'(-1) \right\} \frac{T^k}{k!},$$

$$S_0'(0) = S_0'(-1), \; S_1'(0) - S_1'(-1) = 1, \; S_k'(0) = S_k'(-1), \; \forall k \geq 2.$$

□

Lemma 3.3 對任何正整數 k , 可得

$$S_{2k}'(x-1) = \frac{-(2k)!}{2^{2k-1}(\pi i)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \cos(2n\pi x), \; \forall x \in [0,1], \tag{3.2}$$

$$S_{2k+1}'(x-1) = \frac{-(2k+1)!}{2^{2k}(\pi i)^{2k+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n^{2k+1}} \sin(2n\pi x), \; \forall x \in [0,1]. \tag{3.3}$$

Proof: 由引理 3.2 我們創造出週期函數 $C_k(x),\ k \geq 2$。定義如下: $C_k(x) = S_k'(\frac{x}{2\pi} - 1)$ 對 $x \in [0, 2\pi]$ 以及 $C_k(x) = C_k(x + 2\pi)$ 對 $x \in [0, 2\pi]^c$ 利用 $C_k(x)$ 的傅立葉轉換, 可得 $C_k(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{n,k} e^{inx}$, 且

$$a_{n,k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} C_k(x)dx.$$

依據變數變換積分法, 可得

$$a_{n,k} = \int_0^1 e^{-2n\pi xi} S_k'(x-1)dx,\ n \in \mathbb{Z},\ k \geq 2.$$

為了要計算 $a_{n,k},\ k \geq 2,\ n \in \mathbb{Z}$, 我們將 n 分成兩部分, 一是 $n \neq 0$, 另一則是 $n = 0$。當 $n \neq 0$ 時, 因為

$$\int_0^1 e^{-2n\pi xi} S_0'(x-1)\,dx = \int_0^1 e^{-2n\pi xi} dx = 0,$$

$$\int_0^1 e^{-2n\pi xi} S_1'(x-1)\,dx = -\frac{1}{2n\pi i},\ |T| \leq 2\pi,$$

且

$$\begin{aligned}
\frac{T}{T-2n\pi i} &= \int_0^1 e^{-2n\pi xi} \frac{Te^{Tx}}{e^T - 1} dx \\
&= \int_0^1 e^{-2n\pi xi} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} S_k'(x-1) \frac{T^k}{k!} \right\} dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} \int_0^1 e^{-2n\pi xi} S_k'(x-1)dx,
\end{aligned}$$

可得

$$\int_0^1 e^{-2n\pi xi} \frac{Te^{Tx}}{e^T - 1} dx = -\frac{T}{2n\pi i} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{n,k} \frac{T^k}{k!}.$$

此外, 對 $|T| < 2\pi$, 可引出

$$\frac{T}{T - 2n\pi i} = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{T}{2n\pi i} \right)^k,$$

意指

$$-\frac{T}{2n\pi i} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{n,k} \frac{T^k}{k!} = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{T}{2n\pi i} \right)^k,$$

如此

$$a_{n,k} = -\frac{k!}{(2n\pi i)^k},\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,\ k \geq 2.$$

當 $n = 0$ 時, 因為

$$\int_0^1 e^{-2n\pi xi} S_k'(x-1)dx = S_k(0) - S_k(1) = 0,\ k \geq 2,$$

對任何正整數 $k \geq 2$, 可得 $a_{0,k} = 0$, 藉由傅立葉轉換 $C_k(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{n,k} e^{inx}$, 可得

$$S_k'\left(\frac{x}{2\pi} - 1\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \frac{-k!}{(2n\pi i)^k} e^{inx},$$

因此, 對任何正整數 $k \geq 2, x \in [0,1]$,

$$S'_k(x-1) = \sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} \frac{-k!}{(2n\pi i)^k} e^{2n\pi xi} = \frac{-k!}{(2\pi i)^k} \sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} \frac{1}{n^k} e^{2n\pi xi},$$

$\square$

主定理之證明如下, 首先根據 [5], 我們有

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} 2^{2k-1} \frac{B_{2k}\pi^{2k}}{(2k)!},\ k \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

又利用引理 3.3, 我們得到

$$S'_{2k}(-1) = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}(\pi)^{2k}} \zeta(2k), \quad S'_{2k+1}(-1) = 0,\ k \in \mathbb{N}.$$

因此導出 $S'_{2k}(-1) = B_{2k},\ k \in \mathbb{N}$。據此再結合 (1.1) 導出 $B_0 = S'_0(-1),\ B_1 = S'_1(-1)$,

$$B_{2k} = -\frac{1}{2k+1} \left\{ C_{2k}^{2k+1} S'_1(-1) + \sum_{i=1}^{k} C_{2i+1}^{2k+1} S'_{2k-2i}(-1) \right\},\ k \in \mathbb{N}.$$

4 結論

經由本研究之探討, 我們發現無須利用 $\frac{s}{e^s-1}$ 之泰勒展開式, 即可求出 Bernoulli 數之方法。本文之方法, 透過 Riemann zeta 函數, 建立連續正整數次方和擴充函數 $S_1(x),\ S_2(x), \cdots$ 之一階導數與 Bernoulli 數之關係。雖然此方法, 本質上與過去著名的遞迴公式 (1.1) 是一致的, 但由於擴充函數 $S_0(x) = x,\ \ S_1(x) = \frac{x(x+1)}{2},\ \ S_2(x) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$ 及 $S_3(x) = \frac{x^2(x+1)^2}{4}$ 之型式, 相當容易記憶, 因此, 一旦計算 Bernoulli 數後, 日後需要再應用 Bernoulli 數於各研究領域時, 前面幾項的 Bernoulli 數極容易朗朗上口, 省去繁雜計算。

再者, 根據 [1] [5] [7] 之研究, 我們可以發現 Bernoulli 數與 Riemann zeta 函數 $\zeta(2k) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{2k}}$, 其實有相當密切的關係, 在這樣的認知爲基礎下, 再加上本文的研究結果, 我們發現 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{2k}}$ 與 $\sum_{i=1}^{\infty} i^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$ 彼此之間, 有著那麼耐人尋味的關聯性, 這也是本研究在推導 Bernoulli 數的另一種計算時, 久久不能忘懷的地方。

References

[1] 沈淵源 (2003), “用MATHEMATICA 對自然數之負次方和的探討”, 東海科學, **5**,55-70。

[2] 李宗元 (1979), “閒話 $1^k + 2^k + \cdots + n^k$”, 數學傳播, 第二卷第四期,12-14。

[3] 李志豪 (1991), “傅利葉 (Fourier) 分析淺介”, 數學傳播, 第十五卷第四期,11-19。

[4] 吳松霖、李國寧、胡豐榮、許天維 (2006), “連續整數冪次和公式之指數生成函數”, 數學傳播, 已接受。

[5] 郭嘉南 (1988), “黎曼 zeta 函數與 Bernoulli 數”, 數學傳播, 第十二卷第二期, 47-48。

[6] 蘇益弘、胡豐榮、許天維 (2005), “從連續整數冪次和公式引發之擴充想法”, 數學傳播, 第二十九卷第二期, 30-33。

[7] Yuan-Yuan Shen (2003), “A Note on the Sums of Powers of Consecutive Integers”, *Tunghai Science*, **5**, 101-106.

Another Calculation of Bernoulli Numbers

Yi-Shu Chung* Chi-Shiuan Liu* Tao-Ming Wang† Feng-Rung Hu*

Abstract

In this article, we develop a simple calculation of Bernoulli Numbers via the extend function of the sums of the consecutive integers. We find that

$$B_{2k} = -\frac{1}{2k+1}\left\{C_{2k}^{2k+1}S_1'(-1) + \sum_{i=1}^{k} C_{2i+1}^{2k+1}S_{2k-2i}'(-1)\right\},\ k \in \mathbb{N};\ B_k = S_k'(-1),\ k = 0, 1,$$

where $S_k'(x)$ denotes the first derivative of $S_k(x)$ for each positive integer k.

Keywords: Bernoulli Number, Riemain zeta

*Department of Mathematical Education, Taichung University, Taichung 403, Taiwan
†Department of Mathematics, Tunghai University, Taichung 407, Taiwan